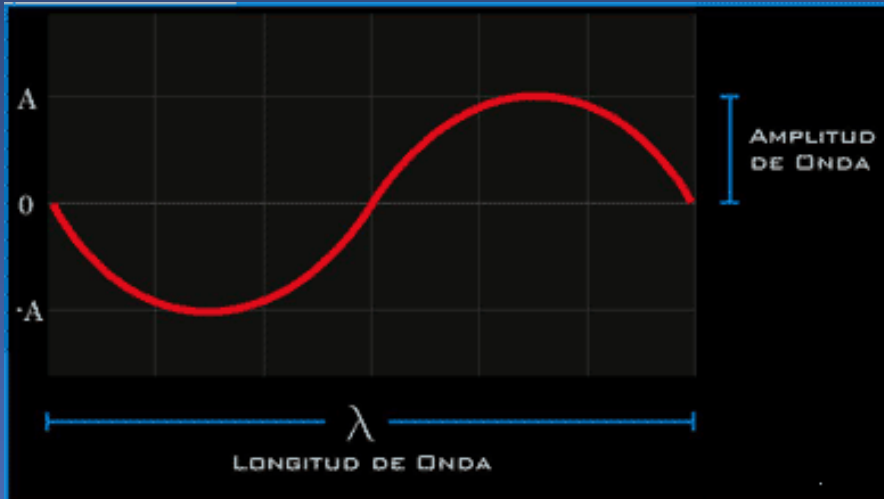


El Clave Bien Temperado. De Pitágoras a Juan Sebastián Bach.

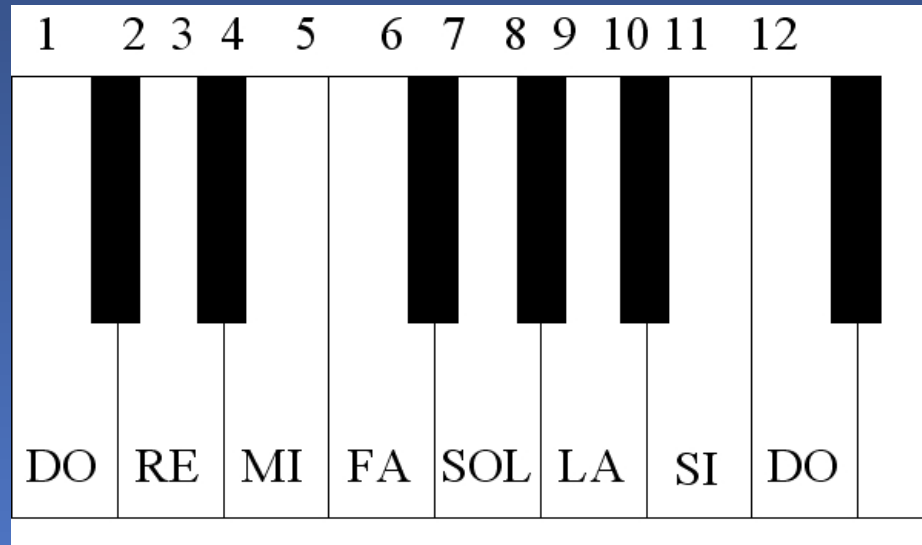
Dr. Carlos E. D'Attellis



El dibujo muestra un ciclo en una unidad de tiempo, (por ej. 1 seg.)

440 ciclos en un segundo (440 Hz) definen la nota La.

Cantidad de intervalos.



Intervalo: $I=1,059$

• $I^1 = 1,059$ $I^6 = 1,414$ $I^{10} = 1,782$

• $I^2 = 1,122$ $I^7 = 1,498$ $I^{11} = 1,888$

• $I^3 = 1,189$ $I^8 = 1,587$ $I^{12} = 2$

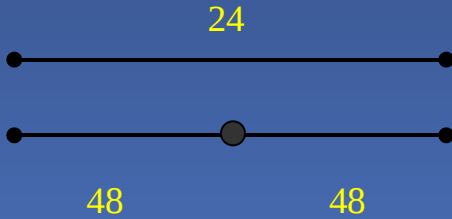
• $I^4 = 1,260$ $I^9 = 1,682$

• $I^5 = 1,335$

¿Por qué 12?

Experimentos básicos.

➤ Experimento 1, n=2.



$$S_1 = \{ 24, 48 \}$$

Octava.

➤ Experimento 2, n=3.



$$S_2 = \{ 24, 36, 48 \}$$

Intervalos: $36/24 = 3/2$, $48/36 = 4/3$

Y sus inversas: $2/3$ y $3/4$.

$$S_2^* = \{ 24, 27, 32, 36, 48 \}$$

Intervalos: $27/24 = 9/8$, $32/27$, $36/32 = 9/8$, $48/36 = 4/3$.

➤ Experimento 3, n=4.

• $S_3 = S_2^*$

➤ Experimento 4, n=5.

• $S_4 = \{24, 27, 30, 32, 36, 40, 48\}$

• $S_4^* = \{24, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48\}$

Tres intervalos.

$$27/24 = 9/8$$

$$30/27 = 10/9$$

$$32/30 = 16/15$$

$$36/32 = 9/8$$

$$40/36 = 10/9$$

$$45/40 = 9/8$$

$$48/45 = 16/15$$

Resumen de resultados.

<i>Experimento</i>	<i>Notas</i>	<i>Intervalos</i>
1	2	1
2	5	3
3	5	3
4	8	3
5	8	3
6	10	6

- Criterio: máximo número de notas con un mínimo número de intervalos.
- Ocho notas y tres intervalos.

Escala Mayor.

- Aquí termina la primera parte de nuestra construcción.
- Como puede verificarse fácilmente, si comenzamos con una nota de 32 Hz, obtenemos:

{32, 36, 40, 45, 48, 55, 60, 64}

Do Re Mi Fa Sol La Si Do

C D E F G A B C

$$55 \times 2 = 110 \times 2 = 220 \times 2 = 440$$

Análisis de los intervalos.

• Experimento 4, 3 intervalos: $9/8$, $10/9$, $16/15$.

Ordenándolos:

$$16/15 < 10/9 < 9/8$$

Los llamaremos st , t , T (semitono, tono menor, tono mayor).

Los intervalos en la escala del experimento 4 son:

$$T, t, st, T, t, T, st$$

• Consideremos los intervalos saltando una nota, dos notas, etc., es decir, terceras, cuartas, etc.

• Terceras. Considerando dos factores, las posibilidades son:

$$T.t = 5/4$$

$$T.st = 6/5$$

$$t.st = 32/27$$

Tres intervalos.

$$27/24 = 9/8$$

$$30/27 = 10/9$$

$$32/30 = 16/15$$

$$36/32 = 9/8$$

$$40/36 = 10/9$$

$$45/40 = 9/8$$

$$48/45 = 16/15$$

Cuartas. Considerando tres factores, obtenemos:

$$T.t.st = 4/3$$

$$T.t.T = 45/32$$

Quintas. Considerando cuatro factores, obtenemos:

$$T.t.st.T = 3/2$$

$$T.st.T.t = 40/27$$

Sextas. Considerando cinco factores, obtenemos:

$$T.T.t.t.st = 5/3$$

$$T.T.t.st.st = 8/5$$

Séptimas. Considerando seis factores, obtenemos:

$$T.T.T.t.t.st = 15/8$$

$$T.T.t. t. st.st = 16/9$$

Octavas. El último caso posible:

$$T.T.T.t.t.st.st = 2$$

Ordenando los intervalos, se obtiene:

$$1 < 81/80 < 25/24 < 135/128 < 16/15 < 10/9 < 9/8 < 6/5 < 5/4 < 4/3 < 45/32 < 3/2 < 8/5 < 5/3 < 16/9 < 15/8 < 2$$

Los correspondientes números decimales son:

1,0000 1,4062

1,0125 1,5000

1,0417 1,6000

1,0547 1,6667

1,0667 1,7778

1,1111 1,8750

1,1250 2,0000

1,2000

1,2500

1,3333

Dado el intervalo i , es posible calcular el número de partes n en que se divide la octava (el producto de i por si mismo realizado n veces es igual a dos)

Si realizamos esos cálculos, resulta:

$$i = 1,0125, \quad n = 56$$

$$i = 1,0417, \quad n = 17$$

$$i = 1,0547, \quad n = 13$$

$$i = 1,0667, \quad n = 11$$

$$i = 1,1111, \quad n = 7$$

Con 5 intervalos el número de notas varía entre 56, demasiado grande, hasta 7, menor que el número de notas básicas (8)

- La mejor elección es $n=13$ o $n=11$.
- Entre esos dos valores, $n=12$.

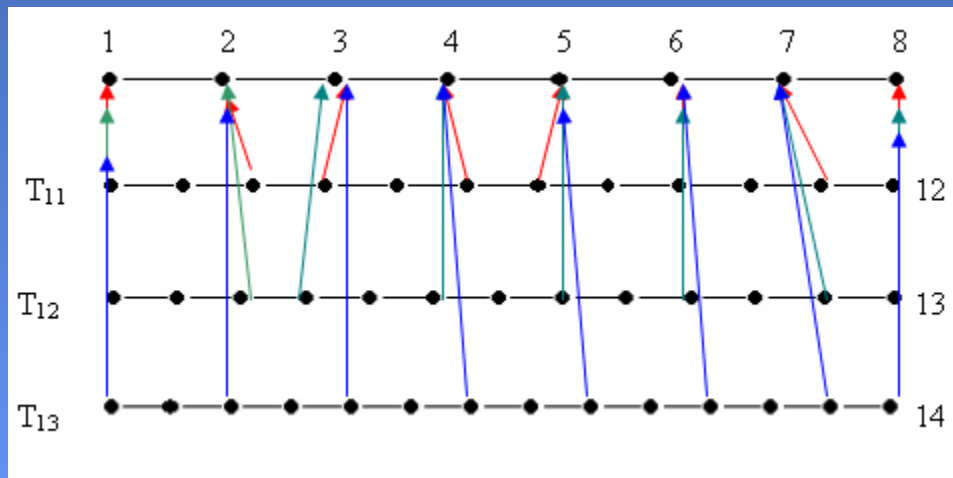
Calculemos:

$$n=11, i=1,0667$$

$$n=12, i=1,0595$$

$$n=13, i=1,0548$$

- La división de la octava en 12 intervalos.



- Cada conjunto contiene 8 notas que son las mas próximas en frecuencia a las originales.
- Pero el que las tiene más cercanas es el conjunto T_{12} .
- Así, la división de una octava en 12 intervalos es el resultado lógico de un problema de optimización.

E. R. 191

J. S. BACH
EL CLAVE
BIEN TEMPERADO

Ó SEA PRELUDIOS Y FUGAS EN TODOS LOS TONOS
Y SEMITONOS DE LOS MODOS MAYORES Y MENORES

EDICIÓN REVISADA Y DIGITADA POR ALESSANDRO LONGO

VOLUMEN SEGUNDO

TEXTO ESPAÑOL
TEXTO ITALIANO
TEXTE FRANÇAIS
ENGLISH TEXT



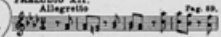
RICORDI AMERICANA
SOCIETÀ EDIZIONE EDITORIALE E COMMERCIALE
BUENOS AIRES

INDICE TEMATICO
TABLE THÉMATIQUE

TABLA TEMÁTICA
THEMATIC TABLE

1. PRELUDIO I. Andante sostenuto Pag. 1.	FUGA I. a 2 parti Allegro moderato Pag. 4.
2. PRELUDIO II. Allegro Pag. 6.	FUGA II. a 4 parti Moderato Pag. 9.
3. PRELUDIO III. Moderato Pag. 11.	FUGA III. a 3 parti Molto mosso sostenuto Pag. 13.
4. PRELUDIO IV. Al ^l moderato Pag. 14.	FUGA IV. a 2 parti Allegro vivace Pag. 17.
5. PRELUDIO V. Allegro vivace Pag. 18.	FUGA V. a 4 parti Andante con moto Pag. 24.
6. PRELUDIO VI. Allegro Pag. 24.	FUGA VI. a 2 parti Vivace Pag. 28.
7. PRELUDIO VII. Al ^l moderato Pag. 25.	FUGA VII. a 4 parti Allegro marcato Pag. 28.
8. PRELUDIO VIII. Allegro moderato Pag. 26.	FUGA VIII. a 4 parti Andante Pag. 30.
9. PRELUDIO IX. Lento moderato Pag. 28.	FUGA IX. a 4 parti Adagio alla breve Pag. 31.
10. PRELUDIO X. Al ^l vivace Pag. 31.	FUGA X. a 2 parti Allegro vivace Pag. 34.
11. PRELUDIO XI. Andante espressivo Pag. 32.	FUGA XI. a 2 parti Allegretto Pag. 37.

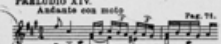
12. PRELUDIO XII.
Allegretto Pag. 59.



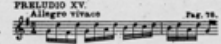
13. PRELUDIO XIII.
Allegretto con moto Pag. 60.




14. PRELUDIO XIV.
Andante con moto Pag. 71.



15. PRELUDIO XV.
Allegro vivace Pag. 76.



16. PRELUDIO XVI.
Largo Pag. 81.



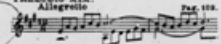
17. PRELUDIO XVII.
Andante con moto Pag. 88.



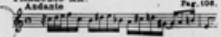
18. PRELUDIO XVIII.
Allegro moderato Pag. 91.




19. PRELUDIO XIX.
Allegretto Pag. 103.



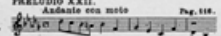
20. PRELUDIO XX.
Andante Pag. 109.




21. PRELUDIO XXI.
Vivace Pag. 109.




22. PRELUDIO XXII.
Andante con moto Pag. 116.



23. PRELUDIO XXIII.
Allegro Pag. 124.



24. PRELUDIO XXIV.
Allegro Pag. 131.




FUGA XII. a 2 parti
All.^{mo} moderato Pag. 61.



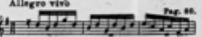
FUGA XIII. a 2 parti
Allegro Pag. 62.



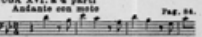
FUGA XIV. a 2 parti
Allegro moderato Pag. 74.




FUGA XV. a 2 parti
Allegro vivo Pag. 80.



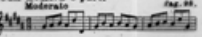
FUGA XVI. a 4 parti
Andante con moto Pag. 84.



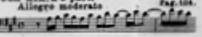
FUGA XVII. a 4 parti
Lento Pag. 91.



FUGA XVIII. a 2 parti
Moderato Pag. 91.




FUGA XIX. a 2 parti
Allegro moderato Pag. 104.



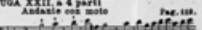
FUGA XX. a 2 parti
Andante maestoso Pag. 109.



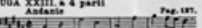
FUGA XXI. a 2 parti
All.^{mo} vivace Pag. 104.



FUGA XXII. a 4 parti
Andante con moto Pag. 109.



FUGA XXIII. a 4 parti
Andante Pag. 127.



FUGA XXIV. a 2 parti
Allegro vivace Pag. 134.

