Laboratorio de Física 1 (ByG)
Guía 4: Viscosidad, empuje y oscilaciones amortiguadas

Verano 2008

Objetivos

Experiencia 1: Viscosidad y Empuje

En esta experiencia de laboratorio vamos a estudiar el movimiento de caída de una esfera en el seno de un fluido, analizando en particular el comportamiento de la fuerza viscosa.

Experiencia 2: Oscilaciones amortiguadas

Se propone estudiar el movimiento de un sistema formado por un resorte y un cuerpo moviéndose en el seno de un líquido viscoso. Caracterizar en forma experimental la influencia del amortiguamiento sobre la amplitud y la frecuencia de la oscilación.

Experiencia 1: Viscosidad y empuje

1. Introducción

Nos proponemos experimentar y entender qué diferencia hay entre el movimiento de una esfera cayendo en un fluido (líquido) y una esfera en caída libre en el aire o en vacío. **Discutan** hipótesis y suposiciones sobre estas dos situaciones, antes de continuar.

En un fluido viscoso la velocidad de una esfera tiende a un valor constante (a diferencia de caída libre, donde la velocidad es proporcional al tiempo). Cuál les parece que es la razón microscópica, para este comportamiento?

¿Cómo podemos comprobar que este modelo describe el movimiento de la esfera?

Una forma de entender este movimiento es suponer que hay una fuerza opuesta al movimiento que depende de la velocidad del objeto: la famosa fuerza viscosa. Si alguna vez te subiste a una bicicleta, habrás notado que, andando a velocidad constante, cuesta mucho más trabajo andar rápido que andar lento. Además un objeto más grande sufre una fuerza mayor, o sea que la fuerza viscosa depende también del tamaño del objeto. Pero... cómo depende de la forma del objeto? Si el tamaño del objeto se duplica, la fuerza viscosa también? El "tamaño" del objeto es el radio R, el perímetro $(2R)$, el área $(4R^2)$, el volumen $(\frac{4}{3}\pi R^3)$, o qué?

Si analizamos las fuerzas ejercidas sobre la esfera, obtendremos el diagrama de cuerpo libre que se muestra en la figura 1. Utilizando la *primera ley de Newton*, tenemos:

$$m\mathbf{g} - \mathbf{E} - \mathbf{F}_v = m\mathbf{a} \qquad (1)$$

donde $m\mathbf{g}$ es el peso, E es el empuje, $\mathbf{F}_v$ es la fuerza viscosa y $\mathbf{a}$ es la aceleración.

Que la esfera se desplace a velocidad constante, indica que la aceleración es cero debido a que las fuerzas se compensan:

Veamos cada una de estas fuerzas, considerando el caso de una esfera:

$$m\mathbf{g} - \mathbf{E} - \mathbf{F}_v = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_v = m\mathbf{g} - \mathbf{E} \qquad (2)$$

Considerando que el objeto en movimiento es una esfera, tenemos para cada una de las fuerzas involucradas:

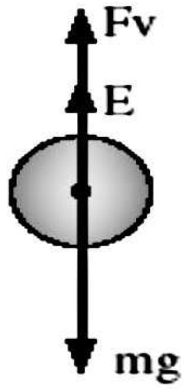

Figura 1: Diagrama de cuerpo libre de una esfera en el seno de un fluido viscoso.

Peso: sólo reescribiremos la masa $m = \rho_e \cdot V_e$, donde V_e es el volumen e la esfera. De esta manera la expresión para el peso resulta:

$$P = mg = \rho_e \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) g$$

Empuje: según el principio de Arquímedes, el empuje es $E = \rho_l \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) g$, donde ρ_l es la densidad del líquido.

Fuerza viscosa: en un flujo laminar, la fuerza de rozamiento sobre el objeto en movimiento es proporcional a su velocidad. Según la *Ley de Stokes,* para una esfera vale:

$$F_v = 6\pi\eta v f(R),$$

donde η es la viscosidad del fluido y $f(R)$ es una función del radio de la esfera R.

Escribiendo estas expresiones en la ecuación 2, resulta:

$$\begin{aligned}
6\pi\eta v_{lim} f(R) &= \rho_e \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) g - \rho_l \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) g \\
\eta v_{lim} f(R) &= \frac{2}{9} g(\rho_e - \rho_l) R^3 \\
v_{lim} &= \frac{2}{9} g \frac{(\rho_e - \rho_l)}{\eta} \frac{R^3}{f(R)}
\end{aligned}$$

De esta manera, obtenemos una expresión para la velocidad límite v_{lim}.

2. Actividades

2.1. Velocidad límite

En el laboratorio contamos con probetas que podemos llenar con aceite y esferas de acero. Soltamos las bolitas de a una con cuidado y estudiamos si el movimiento alcanza una v_{lim}.

Empleando esferas que alcancen v_{lim}, del mismo material y con radios distintos, vamos a poder encontrar cuál es la relación entre las velocidades y, por lo tanto, deducir cuál es la forma funcional de la fuerza viscosa con el radio de la esfera, es decir $f(R)$. Así podemos también estimar η.

2.2. Balanza de Mohr

Este es un dispositivo que sirve para medir densidades de líquidos utilizando el empuje hidrostático. Si sumergimos el mismo cuerpo en dos líquidos distintos, el empuje en cada líquido será $E_1 = \rho_1 V g$ para el líquido 1 y $E_2 = \rho_2 V g$ para el líquido 2. Por lo tanto:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \tag{3}$$

De esta manera, si utilizamos agua destilada como líquido 1, podremos obtener la densidad del líquido 2. Ver más detalles en el apéndice y figura 3.

Algunas preguntas (para antes, durante y después de las mediciones):

- ¿Cómo harías para determinar la densidad de las esferas ρ_e?
- ¿Cómo se hace para determinar en este experimento? ¿Se te ocurre otra manera?
- Analicemos el modelo propuesto para la fuerza viscosa:

$$F_v = -6\pi\eta v f(R)$$

Con las mediciones realizadas:

- ¿Podemos afirmar que este modelo describe el movimiento de la esfera?
- ¿Podría ir un v^2 en vez de simplemente v? ¿Podría poner alguna otra potencia par de v?

Experiencia 2: Oscilaciones amortiguadas

1. Introducción

La ecuación que describe el movimiento armónico simple es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \tag{4}$$

cuya solución más general es:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{5}$$

siendo A y φ constantes a determinar a partir de las condiciones iniciales.

En el caso de una masa M suspendida de un resorte tenemos:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} \tag{6}$$

donde k es la constante elástica del resorte y M la masa total efectiva oscilante.

En muchos sistemas físicos el rozamiento juega un papel importante. Cuando la fuerza resistiva depende de la velocidad puede escribirse de la forma: $F = -\alpha\frac{dx}{dt}$. En este caso, se agrega a la ecuación 4 la expresión de la fuerza resistiva, quedando:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha}{M}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0\,, \tag{7}$$

cuya solución depende de los valores de los distintos parámetros ω_0, α y M involucrados (casos *sub-amortiguado*, *crítico* y *sobre-amortiguado*).

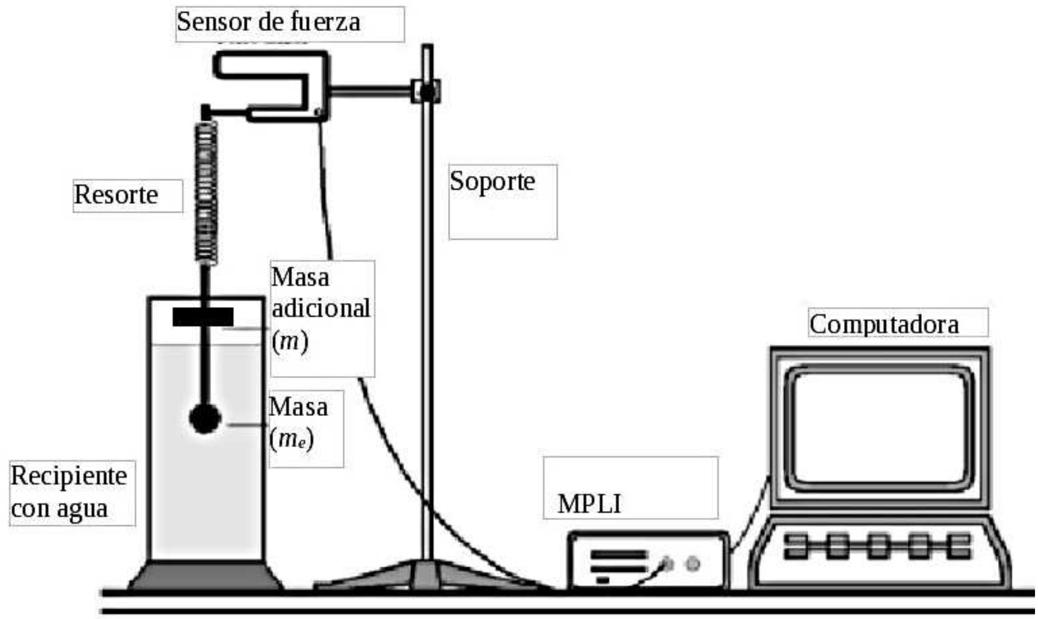

Figura 2: Esquema del dispositivo experimental

Suponiendo que estamos en el caso *sub-amortiguado*, es decir $\left(\frac{\alpha}{2M}\right)^2 < \omega_0^2$ (la fuerza elástica es más importante que la fricción, al menos por algún tiempo) entonces la solución es oscilatoria. Sin embargo, la amplitud de dichas oscilaciones se ve modulada por una función exponencial decreciente:

$$x(t) = A\exp(-\gamma t)\cos(\omega t + \varphi) + x_0 \tag{8}$$

donde:

$$\gamma = \frac{\alpha}{2M}, \ \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}.$$

φ y x_0 dependen de las condiciones iniciales.

2. Actividades

Un esquema del dispositivo experimental se muestra en la Figura 2. Un resorte colgado en un extremo de un sensor de fuerza y en el otro extremo se coloca una masa en forma de esfera (m_e), que se mantiene sumergida en el líquido durante toda la oscilación. Al soporte de la esfera se le puede agregar una masa adicional (m) de forma tal que esta masa permanezca fuera del líquido durante las oscilaciones para no cambiar la forma del cuerpo. Se propone estudiar el movimiento oscilatorio en aire y con la masa sumergida en agua.

Se utilizará un sensor de fuerza conectado a la interfaz MPLI. El sensor mide la fuerza que aplica el resorte en función del tiempo. Como la fuerza es proporcional al desplazamiento ($F = -k'x$)[1], pueden transformarse fácilmente los datos obtenidos y realizar un gráfico de posición de la masa en función del tiempo.

Compará los resultados obtenidos en aire y en agua para intervalos de tiempo similares.

- ¿Cómo se podría obtener el coeficiente de amortiguamiento γ a partir del decaimiento de la amplitud?
- ¿Se puede determinar el valor de γ para el agua comparando la frecuencia de oscilación obtenida en aire con la frecuencia medida para el movimiento en agua?

[1] Notar que k' no es exactamente la constante de fuerza k del resorte. Por qué ?

Nota: Se sabe que el sensor de fuerza presenta una respuesta lineal. Por lo tanto el voltaje V medido se relaciona con la fuerza aplicada F mediante la ecuación: $V = aF + b$, donde a y b son parámetros obtenidos de la calibración del instrumento. ¿Es necesario calibrar el sensor de fuerza para obtener el coeficiente de amortiguamiento?

2.1. Actividad complementaria

Se puede realizar un ajuste de curva no lineal, para comparar los resultados experimentales con el modelo teórico propuesto. Para ello utilizaremos la siguiente función:

$$x(t) = P_1 + P_2 \exp(-P_3 t) \cos(P_4 t + P_5)\,,$$

donde:

P_1 es la posición de equilibrio alrededor de la cual se producen las oscilaciones.P_2 es la amplitud inicial del movimiento. $P_3 = \gamma$ es la constante de amortiguamiento y $P_4 = \omega$ es la frecuencia de las oscilaciones. $P_5 = \varphi$ es la fase inicial del movimiento en radianes. Comparar con la ecuación 8.

Para hacer este ajuste de curva exitosamente será importante poder inicializar correctamente los parámetros del ajuste, por lo tanto se recomienda obtener los valores iniciales de los P_i a partir de las mediciones.

A. Apéndice
Uso de la balanza de mohr

Se trata de una balanza de brazos desiguales, que se utiliza para medir densidades de líquidos. El brazo corto termina en una masa compacta P (contrapeso, provista de una aguja que debe enfrentarse a otra fija al chasis, cuando la balanza está en equilibrio. Ver el esquema en la figura 3. Del extremo del brazo largo se cuelga un inmersor de vidrio, que tiene adentro un termómetro para medir la temperatura del liquido cuya densidad se determina. En este brazo hay marcadas nueve muescas numeradas de 1 a 9.

Cuando el inmersor esta colgado en aire, queda equilibrado por el contrapeso P. Al sumergir el inmersor en un líquido el empuje hidrostático desequilibra la balanza. Para restablecer el equilibrio se monta sobre el brazo graduado unas pesas con forma de horquillas (*jinetillos*), de forma de compensar el empuje hidrostático. Para ello se cuenta con jinetillos de tres tamaños, de manera tal que si al mayor se le asigna el valor 1, al intermedio le corresponde el valor 1/10 y al menor 1/100. Si, por ejemplo, el equilibrio se obtiene con un jinetillo 1 en la posición 8, un jinetillo 1/10 en la posición 5 y otro en la 2 y un jinetillo 1/100 en la posición 3, corresponderá a un empuje de 8,73. Es decir: se suman todos los valores de los jinetillos multiplicados por el número de la muesca que ocupan.

Procedimiento

1. Montar la balanza y colgar el inmersor (limpio y seco) del gancho que hay en el extremo del brazo largo. La balanza debe quedar equilibrada. Si no es así, verificar si la balanza está bien nivelada. Una vez comprobado esto y si la misma sigue desbalanceada accionar el contrapeso P (ver figura 3) hasta balancearla.

2. Llenar la probeta de agua destilada y colocar el inmersor dentro de ella de modo que quede totalmente sumergido, sin tocar el fondo, ni las paredes y cuidando que no tenga burbujas de aire adheridas

3. Restablecer el equilibrio colocando jinetillos, empezando por los mayores y ensayando en las diferentes posiciones. Proceder así hasta equilibrar la balanza y anotar el valor del empuje obtenido.

4. Anotar la temperatura del inmersor y consultar una tabla de densidades absolutas del agua pura a distintas temperaturas.

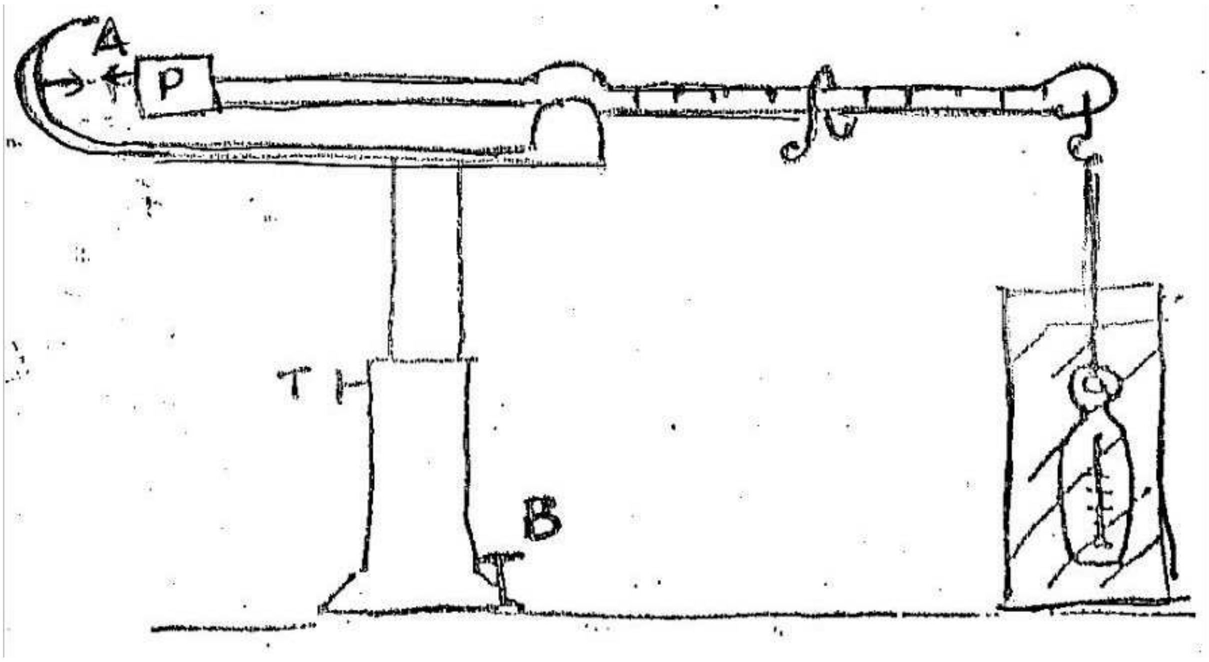

Figura 3: Esquema de la balanza de Mohr.

5. Descargar la balanza, secar el inmersor y colgarlo nuevamente.

6. Sumergir el inmersor en el líquido cuya densidad se quiere determinar y medir el empuje correspondiente (ídem paso 3)

7. Calcular por medio de la siguiente relación la densidad incógnita:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$